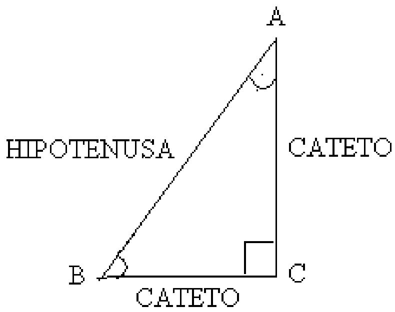
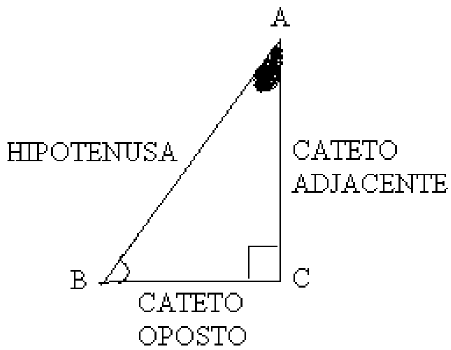
RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

As relações trigonométricas, são estudadas no triângulo retângulo que você já viu é um triângulo que tem um ângulo reto e seus lados indicados por hipotenusa e dois catetos.



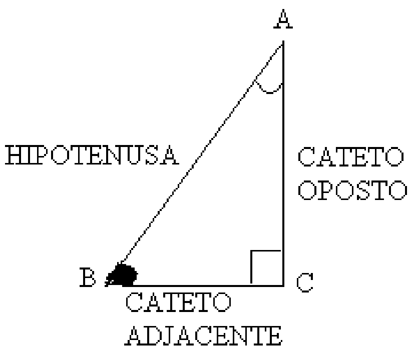
No estudo de trigonometria vamos dar nome aos catetos que podem ser OPOSTO OU ADJACENTE e que depende do ângulo observado, o importante é você saber que o **cateto oposto** é o cateto que está do outro lado do ângulo observado e **cateto adjacente** é o cateto que está ligado ao ângulo observado.

Veja um exemplo, utilizando como referência o ângulo A.



Veja o cateto oposto está no lado oposto ao ângulo A e o cateto adjacente está ligado ao ângulo A.

Veja outro exemplo, utilizando como referência o ângulo B.



Veja o cateto oposto está no lado oposto ao ângulo B e o cateto adjacente está ligado ao ângulo B.

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DO ÃNGULO AGUDO

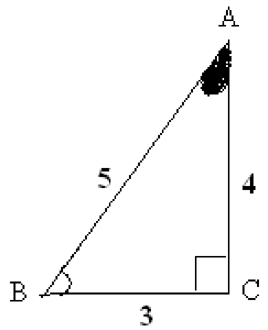
Estudaremos as razões:SENO, COSSENO E TANGENTE.

$$\text{SENO} = \frac{\text{MEDIDA DO CATETO OPOSTO}}{\text{MEDIDA DA HIPOTENUSA}}$$

$$\text{COSSENO} = \frac{\text{MEDIDA DO CATETO ADJACENTE}}{\text{HIPOTENUSA}}$$

$$\text{TANGENTE} = \frac{\text{MEDIDA DO CATETO OPOSTO}}{\text{MEDIDA DO CATETO ADJACENTE}}$$

Ex: Calcule o Seno de A, cosseno de A e tangente de A.



Vamos utilizar abreviações para representar seno (sen), cosseno (cos) e tangente (tg) .

Seno de A é o cateto oposto (3) dividido pela hipotenusa (5)

$sen.\hat{A} = \frac{3}{5}$ dividindo 3 por 5

$sen.\hat{A} = 0{,}6$

Cosseno de A é o cateto adjacente (4) dividido pela hipotenusa (5)

$\cos.\hat{A} = \frac{4}{5}$ dividindo 4 por 5

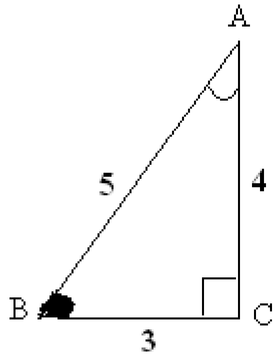
$\cos.\hat{A} = 0{,}8$

Tangente de A é o cateto oposto (3) dividido pela cateto adjacente (4)

$tg.\hat{A} = \frac{3}{4}$ dividindo 3 por 4

$tg.\hat{A} = 0{,}75$

Ex: Calcule o Seno de B, cosseno de B e tangente de B.



Vamos utilizar abreviações para representar seno (sen), cosseno (cos) e tangente (tg) .

Seno de B é o cateto oposto (4) dividido pela hipotenusa (5)

$sen.B = \frac{4}{5}$ dividindo 4 por 5

$sen.B = 0{,}8$

Cosseno de B é o cateto adjacente (3) dividido pela hipotenusa (5)

$\cos.B = \frac{3}{5}$ dividindo 3 por 5

$\cos.B = 0{,}6$

Tangente de B é o cateto oposto (4) dividido pela cateto adjacente (3)

$tg.B = \frac{4}{3}$ dividindo 4 por 3

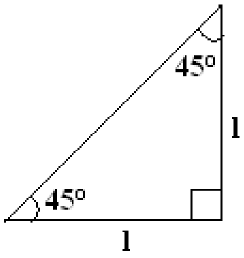
$tg.B = 1{,}333...$

OBS: nas resoluções de problemas que envolverem proporção não vai ser necessário fazer a divisão, poderá ficar em forma de fração.

Existe uma tabela de razões trigonométricas que varia de 1 grau até 89 graus que não é necessário aprender todos esses valores, geralmente a questão traz esse valor.

ÂNGULOS DE 30° , 45° E 60°

Dentro das razões trigonométricas são ângulos especiais que se apresentam na forma fracionária.vamos ver como calcular cada um deles:



Todo triângulo retângulo que tenha ângulo de 45° tem a medida dos catetos iguais na figura acima denominada de l.

Para se calcular seno e cosseno de 45° devemos ter a medida da hipotenusa, que calculamos através do teorema de Pitágoras.

$(\text{hip.})^2 = (\text{cat.})^2 + (\text{cat.})^2$

$(\text{hip.})^2 = l^2 + l^2$ resolvendo a soma

$(\text{hip.})^2 = 2\,l^2$ o expoente 2 da hip. Vira raiz

$hip. = \sqrt{2l^2}$ o l tem expoente igual ao índice, então ele sai da raiz

$hip. = l\sqrt{2}$

Agora que temos a hipotenusa podemos calcular seno e cosseno de 45°

$sen45° = \frac{l}{l\sqrt{2}}$ simplifica l por l $\cos 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}}$ simplifica l por l

$sen45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ racionaliza, multiplicando por $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ também racionaliza

$sen45° = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ faz as multiplicações $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ faz as multiplicações

$sen45° = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}$ resolve a raiz de 4 $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}$ resolve a raiz de 4

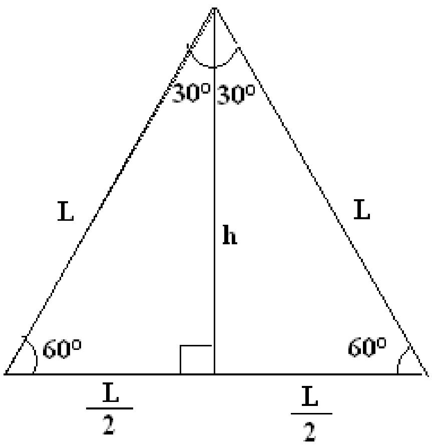
$sen45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ esse é o seno de 45° $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ esse é o cosseno de 45°

OBS: veja que seno e cosseno de 45° são iguais.

Agora vamos calcular a tangente de 45°

$tg\,45° = \frac{l}{l}$ resolvendo a divisão de 1 por l , então a **tg de 45° = 1**

Para calcularmos seno, cosseno e tangente de 30° e 60° utilizaremos o triângulo equilátero (lados iguais) e os três ângulos também iguais a 60° ,traçando a altura perpendicular a um dos lados, ela dividi o ângulo de 60° ao meio, veja a figura abaixo.



Cada lado do triângulo mede L, quando foi traçada a altura (h) dividi o lado ao meio, observe que ao traçar a altura, criamos dois triângulos retângulos.

Para calcularmos seno, cosseno e tangente de 30° e 60° devemos, calcular primeiro o valor de h utilizando o teorema de Pitágoras.

$L^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2$ resolvendo a potência do parêntese

$L^2 = \frac{L^2}{4} + h^2$ equação com denominador, tiramos o mmc dividimos pelo denominador e multiplicamos pelo numerador

$\frac{4L^2}{4} = \frac{L^2 + 4h^2}{4}$ cancelamos os denominadores

$4L^2 = L^2 + 4h^2$ invertendo a igualdade toda teremos

$L^2 + 4h^2 = 4L^2$ deixando h no primeiro membro ,temos

$4h^2 = 4L^2 - L^2$ resolvendo a subtração

$4h^2 = 3L^2$ o 4 que está multiplicando h vai dividir

$h^2 = \frac{3L^2}{4}$ o expoente do h vira raiz

$h=\sqrt{\frac{3L^2}{4}}$ o (L) tem expoente igual ao índice da raiz então ele sai do radical e resolve a raiz de 4, que está no denominador e continua o resultado no denominador

$h=\frac{L\sqrt{3}}{2}$ esse era o cateto que estava faltando está na mesma variável do outro

Vamos então calcular o **seno de 30°** **e o seno de 60°**, Lembrando que é cateto oposto dividido pela hipotenusa.

Seno de 30°

$sen30°=\frac{\frac{L}{2}}{L}$ divisão de fração conserva a 1ª e multiplica pelo inverso da 2ª

$sen30°=\frac{L}{2}.\frac{1}{L}$ simplifica L por L e teremos

$sen30°=\frac{1}{2}$

seno de 60°

$sen60°=\frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{L}$ divisão de fração conserva a 1ª e multiplica pelo inverso da 2ª

$sen60°=\frac{L\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{L}$ simplifica L por L e teremos

$sen60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Vamos, calcular o **cosseno de 30°** **e o cosseno de 60°**, Lembrando que é cateto adjacente dividido pela hipotenusa.

Cosseno de 30° **e cosseno de 60°**

$\cos 30°=\frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{L}$ divisão de fração

$\cos 30°=\frac{L\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{L}$ simplifica L

$\cos 60°=\frac{\frac{L}{2}}{L}$ divisão de fração

$\cos 60°=\frac{L}{2}.\frac{1}{L}$ simplifica L

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$

Vamos, calcular o **tangente de 30° e o tangente de 60°**, Lembrando que é cateto oposto dividido pelo cateto adjacente.

tangente de 30° e tangente de 60°

$tg 30° = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{L\sqrt{3}}{2}}$ divisão de fração $tg 60° = \frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{\frac{L}{2}}$ divisão de fração

$tg 30° = \frac{L}{2} . \frac{2}{L\sqrt{3}}$ simplifica L e 2 $tg 60° = \frac{L\sqrt{3}}{2} . \frac{2}{L}$

$tg 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ racionaliza $tg 60° = \sqrt{3}$

$tg 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ multiplicando numeradores e denominadores

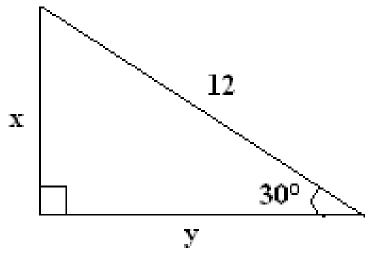
$tg 30° = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}}$ resolve a raiz de 9

$tg 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Veja na tabela todos os valores calculados

	30°	45°	60°
SENO	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
COSSENO	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
TANGENTE	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

- ✓ Calcule os valores de x e y no triângulo retângulo abaixo



Como o triângulo traz o valor de um ângulo e o valor de um dos lados, podemos usar as razões trigonométricas, veja para calcularmos o valor de x precisamos montar uma razão que tenha um número e a variável x.

Com relação ao ângulo 30° o x é um cateto oposto e 12 é hipotenusa, logo a relação que utiliza cateto oposto e hipotenusa é a relação do SENO.

$sen30° = \frac{cat.oposto}{hip.}$ substituímos cat. Oposto por x e hipotenusa por 12

$sen30° = \frac{x}{12}$ substitua o sen.30° pelo valor da tabela acima

$\frac{1}{2} = \frac{x}{12}$ virou uma proporção, multiplicamos meios pelos extremos

$2x = 12$ o 2 vai dividir

$x = \frac{12}{2}$ resolvendo a divisão

x = 6

Com relação ao ângulo 30° o y é um cateto adjacente e 12 é hipotenusa, logo a relação que utiliza cateto adjacente e hipotenusa é a relação do COSSENO.

$\cos 30° = \frac{cat.adjacente}{hip.}$ substituímos cat. adjacente por y e hipotenusa por 12

$\cos 30° = \frac{y}{12}$ substitua o sen.30° pelo valor da tabela acima

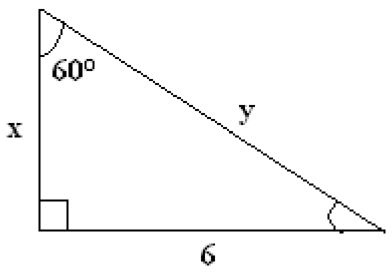
$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{12}$ virou uma proporção, multiplicamos meios pelos extremos

$2x = 12\sqrt{3}$ o 2 vai dividir

$x = \frac{12\sqrt{3}}{2}$ resolvendo a divisão

$x = 6\sqrt{3}$

- ✓ Calcule o valor de x e y no triângulo retângulo abaixo.



Para montar a razão com y e 6, veja que o y é hipotenusa e 6 com relação ao 60° é um cateto oposto, portanto utilizaremos relação SENO.

$sen60° = \frac{cat.oposto}{hip.}$ substituímos cateto oposto por 6 e hipotenusa por y

$sen60° = \frac{6}{y}$ substitui o seno de 60° pelo valor da tabela

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{y}$ multiplica meios pelos extremos

$\sqrt{3}y = 12$ a raiz vai dividir

$y = \frac{12}{\sqrt{3}}$ como tem raiz no denominador deve racionalizar

$y = \frac{12}{\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ multiplica os numeradores e denominadores entre si

$y = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{9}}$ resolve a raiz de 9

$y = \frac{12\sqrt{3}}{3}$ divide 12 por 3 e conserva a raiz

$y = 4\sqrt{3}$

Para montar a razão com x e 6, veja que o x com relação ao 60° é cateto adjacente e 6 com relação ao 60° é cateto oposto, portanto utilizaremos relação TANGENTE.

$tg60° = \frac{cat.oposto}{cat.adjacente}$ substituímos cateto oposto por 6 e cateto adjacente por x

$tg60° = \frac{6}{x}$ substitui o seno de 60° pelo valor da tabela

$\sqrt{3} = \frac{6}{x}$ multiplica meios pelos extremos

$\sqrt{3}x = 6$ a raiz vai dividir

$x = \frac{6}{\sqrt{3}}$ como tem raiz no denominador deve racionalizar

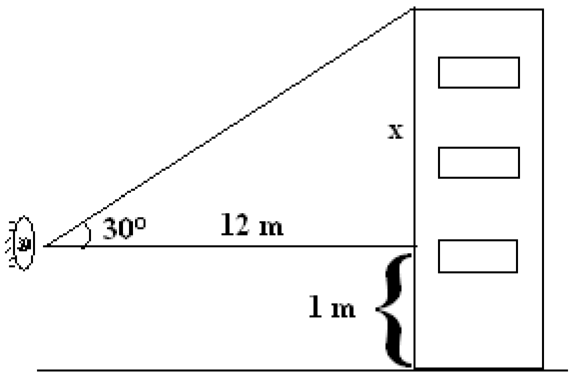
$x = \frac{6}{\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ multiplica os numeradores e denominadores entre si

$x = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{9}}$ resolve a raiz de 9

$x = \frac{6\sqrt{3}}{3}$ divide 6 por 3 e conserva a raiz

$x = 2\sqrt{3}$

- ✓ Uma pessoa que tem a altura dos olhos de 1 metro com relação, estando a uma distância de 12 m de um edifício avista o topo do edifício sob um ângulo de 30°.Qual a altura do edifício? OBS: considere $\sqrt{3}$ = 1,73



Veja, a distância do edifício para o observador se torna o cateto adjacente e o cateto oposto foi denominado de x, logo a altura do edifício será x + 1.

Como temos os dois catetos utilizaremos a relação TANGENTE para calcular x

$tg30° = \frac{cat.oposto}{cat.adjacente}$ substitui os valores dos catetos

$tg30° = \frac{x}{12}$ substitui o valor da tg de 30°

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{12}$ multiplica meios pelos extremos

$3x = 12\sqrt{3}$ o 3 vai dividir

$x = \frac{12\sqrt{3}}{3}$ dividi 12 por 3 e conserva a raiz

$x = 4\sqrt{3}$

Logo a altura do edifício é:

X + 1

$4\sqrt{3}$ + 1 como a raiz de 3 vale 1,73, vamos substituir

4 . 1,73 + 1 faz primeiro a multiplicação

6,92 + 1 somando teremos a altura do edifício

7,92 m